# FRAÇÕES CONTINUADAS. O CASO INFINITO.

FERNANDO FERREIRA



**Definição 1.** *Dado $a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sucessão de números reais positivos, definem-se por recorrência as duas seguintes sucessões: $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$ e, para $n \geqslant 2$,*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

*Também $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ e, para $n \geqslant 2$,*

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Tem-se o seguinte Facto (6): para todo o inteiro não negativo $n$, $q_n > 0$. Também se tem o Facto (7): $q_n < q_{n+1}$ para todo o número natural $n$. Daqui sai facilmente que, no caso simples (em que as entradas são número inteiros), se tem $n \leqslant q_n$ para todo o inteiro não negativo $n$.

**Proposição 1.** *Para todo o inteiro não negativo $n$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$.*

**Demonstração.** Por indução em $n$. Os casos $n = 0$ e $n = 1$ são de verificação trivial. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant 2$. Por definição,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}].$$

Se considerarmos os pês e quês da definição acima (até ao índice $n$) da fração continuada do lado direito desta igualdade tem-se, por hipótese de indução,

$$\frac{p_n^*}{q_n^*} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}],$$

onde escrevemos $p_k^*$ e $q_k^*$ para os pês e os quês acima referidos. Vem, por definição,

$$\frac{p_n^*}{q_n^*} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1}^* + p_{n-2}^*}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1}^* + q_{n-2}^*} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}},$$

pois, obviamente, $p_{n-1}^* = p_{n-1}$, $p_{n-2}^* = p_{n-2}$, $q_{n-1}^* = q_{n-1}$ e $q_{n-2}^* = q_{n-2}$. Multiplicando o numerador e o denominador por $a_{n+1}$, ficamos com

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = \frac{a_{n+1} a_n p_{n-1} + p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{a_{n+1} a_n q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}},$$

como se queria. □

**Proposição 2.** *Nas condições da definição acima, tem-se:*

(a) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$, *para todo o natural $n$;*
(b) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$, *para todo o natural $n$ com $n \geqslant 2$.*

**Observação.** *Os factos (a) e (b) acima podem ser reformulados da seguinte maneira:*

(a') $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$, *para todo o natural $n$;*
(b') $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^n \frac{a_n}{q_n q_{n-2}}$, *para todo o natural $n$ com $n \geqslant 2$.*

**Demonstração.** A primeira alínea demonstra-se facilmente por indução em $n$. A verificação do caso $n = 1$ é óbvia. E

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - p_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) =$$
$$= a_{n+1}p_nq_n + p_{n-1}q_n - p_na_{n+1}q_n - p_nq_{n-1} = p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n.$$

A última igualdade justifica-se pela hipótese de indução.

A segunda alínea demonstra-se diretamente:

$$p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) =$$
$$= a_np_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-2} - p_{n-2}a_nq_{n-1} - p_{n-2}q_{n-2} = a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = a_n(-1)^n,$$

em que a última igualdade se justifica pela primeira alínea. □

No caso da fração continuada ser simples, a alínea (a) mostra o Facto (8) de que $p_n \perp q_n$. Ainda no caso simples, costuma denotar-se por $c_n$ o número racional $\frac{p_n}{q_n}$: o denominado $n$-ésimo convergente. Tem-se o seguinte Facto (9): $c_0 < c_2 < c_4 < c_5 < \ldots$ e $\ldots < c_7 < c_5 < c_3 < c_1$. Isto é uma clara consequência da observação (b').

**Lema 1.** *Para $k$ e $r$ inteiros não negativos, $c_{2k} < c_{2r+1}$.*

**Demonstração.** Se $k \leqslant r$, vem $c_{2k} \leqslant c_{2r} < c_{2r+1}$. A segunda desigualdade sai imediatamente da observação (a'). Se $r < k$, tem-se $c_{2k} < c_{2k+1} < c_{2r+1}$. A observação (a') também justifica a primeira desiguldade. □

A situação é a seguinte. Os convergentes pares crescem estritamente e são menores do que os convergentes ímpares. É claro que os convergentes pares têm como limite o seu supremo $\theta_{\text{sup}}$. Por sua vez, os convergentes ímpares decrescem estritamente e são maiores do que todos os convergentes pares. Estes convergentes ímpares têm como limite o seu ínfimo $\theta_{\text{inf}}$. Tem-se a figura:

$$c_0 < c_2 < c_4 < \ldots \to \theta_{\text{sup}} \leqslant \theta_{\text{inf}} \leftarrow \ldots c_5 > c_3 > c_1$$

O próximo resultado mostra que a diferença entre os convergentes ímpares e os convergentes pares tende para zero e que, portanto, $\theta_{\text{sup}}$ e $\theta_{\text{inf}}$ são o mesmo número $\theta$.

**Proposição 3.** *Seja $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sucessão de números naturais. A sucessão dos convergentes*

$$n \rightsquigarrow [a_0, a_1 \ldots, a_n]$$

*tende para um determinado limite que se denota por $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$.*

**Demonstração.** Tem-se

$$|c_{n+1} - c_n| = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \left|\frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leqslant \frac{1}{q_n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

onde estamos a utilizar (a) e o Facto (7). Daqui conclui-se que $\theta_{\text{sup}} = \theta_{\text{inf}}$ e que a sucessão dos convergentes $c_n$ tem como limite este valor comum. □

À figura $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$ chama-se uma *fração continuada* (simples) *infinita.* Informalmente:

$$[a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

**Proposição 4.** *Seja $\theta = [a_0, a_1, a_2 \ldots]$, onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma sucessão de números naturais. Então, para todo o número natural $n$,*
$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

**Demonstração.** Dado que $\theta$ está entre $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, tem-se
$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2},$$
por (a) e o Facto (7). □

**Corolário 1.** *O valor duma fração continuada (simples) infinita é um número irracional.*

**Demonstração.** Seja $\theta = [a_0, a_1, a_2 \ldots]$. Pela proposição anterior, há um número infinito de números racionais $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$) tais que
$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}.$$
Por um resultado duma secção anterior, $\theta$ é irracional. □

Antes de terminarmos esta secção vamos estabelecer dois factos. O Facto (10) é o seguinte: para toda a fracção continuada (simples) infinita $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ e para todo o número natural $k$, tem-se
$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \ldots]]$$
Com efeito:
$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots] = \lim_n [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n] =$$
$$= \lim_n [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \lim_n [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]] =$$
$$= [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \ldots]].$$
A segunda igualdade justifica-se pelo Facto (3) e a igualdade seguinte justifica-se por continuidade, i.e., pelo Facto (4).

Seja $\theta$ o número irracional dado pela fração continuada simples infinita $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Para cada inteiro não negativo $n$, seja $\theta_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$. Pelo Facto (10), tem-se que $\theta$ é $[a_0, \ldots, a_{n-1}, \theta_n]$ (em particular, $\theta = \theta_0$). A fração $[a_0, \ldots, a_{n-1}, \theta_n]$ é uma fração continuada *finita*, mas não é simples (por causa da última entrada $\theta_n$). A Proposição 1 aplica-se a esta fração, obtendo-se (para $n \geqslant 2$)
$$\theta = \frac{p_n^*}{q_n^*} = \frac{\theta_n p_{n-1}^* + p_{n-2}^*}{\theta_n q_{n-1}^* + q_{n-2}^*} = \frac{\theta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\theta_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$
pois, obviamente, $p_{n-1}^* = p_{n-1}$, $p_{n-2}^* = p_{n-2}$, $q_{n-1}^* = q_{n-1}$ e $q_{n-2}^* = q_{n-2}$ (os pês e os quês estrelas são os pês e os quês da fração $[a_0, \ldots, a_{n-1}, \theta_n]$, enquanto os meros pês e quês são os da fração $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$). O Facto (11) é o seguinte:
$$\theta = \frac{\theta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\theta_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$